# CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR 1980

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

*(durée : 1 h 30 - coefficient : 3)*

Le II. est indépendant du I., la question III. 2) est indépendante du reste du problème.

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par :

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

et $\varphi$ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$$

I.

1) A partir du développement en série entière de l'exponentielle, déterminer celui de $\varphi$ . On ne demande pas de calculer son rayon de convergence.

2) Combien de termes de la série faut-il calculer pour avoir une valeur approchée de $\varphi(0,9)$ avec une erreur inférieure à $10^{-5}$ ? Calculer cette valeur approchée.

II. Calcul de $\int_{0,9}^{1,5} f(t)dt$

Soit $I = \int_a^b f(t)dt$.

Un entier naturel non nul n étant donné, la formule de Simpson donne comme valeur approchée de I le réel J :

$$J = \frac{b - a}{6n} \left[ y_0 + y_{2n} + 2\sum_{p=1}^{n-1} y_{2p} + 4\sum_{p=0}^{n-1} y_{2p+1} \right]$$

avec : pour i entier $0 \leqslant i \leqslant 2n$ $\quad y_i = f(a + \frac{b - a}{2n}.i)$

L'erreur de méthode $|J - I|$ est majorée par $\varepsilon$ avec :

$$\varepsilon = \frac{(b - a)^5}{180n^4} M' \qquad \text{où} \quad M' = \sup_{x \in [a, b]} \left| f^{(IV)}(x) \right|$$

($f^{(IV)}$ désignant la dérivée quatrième de la fonction f)

1) On pose a= 0,9 et b = 1,5. Quelles valeurs de n faut-il prendre pour obtenir une valeur approchée de I à $2.10^{-5}$ près ? Parmi les valeurs possibles de n on choisira la plus petite. On donne le tableau de variation simplifié de $f^{(IV)}$ ci-dessous :

| x | 0 | | β | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f^{(IV)}(x)$ | 3 | ↘ | | ↗ | -0,67 |

$\beta = \sqrt{5 - \sqrt{10}}$

2) Calculer la valeur de J correspondant à la valeur de n trouvée au 1) ; les candidats devront faire figurer sur leurs copies les valeurs des $y_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant 2n$.

Quel encadrement de I obtient-on ?

III. On définit une fonction numérique u par :

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = u(x).f(x) \qquad \text{(Attention aux bornes de l'intégrale !)}$$

1) En utilisant le résultat suivant dont on ne demande aucune justification :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

calculer à l'aide des résultats précédents u(1,5). Comparer avec la valeur donnée à la question suivante.

.../...

2) On admettra sans démonstration les deux résultats suivants :

*) u décroit sur $[0, +\infty[$

*) $\forall x \in ]0, +\infty[$ $\quad 0 \leqslant u(x) \leqslant \frac{1}{x}$

Il est donc logique de chercher à interpoler u par une fonction homographique v.

a) Déterminer les trois réels a,b,d tels que la fonction v définie par :

$$v(x) = \frac{ax + b}{x + d}$$

vérifie :

$$v(1) = u(1) = 0{,}655680$$

$$v(1{,}5) = u(1{,}5) = 0{,}515816$$

$$v(2) = u(2) = 0{,}421368$$

On se contentera de donner des valeurs approchées de ces réels sans chercher à évaluer l'incertitude sur chacun d'eux.

b) Calculer v(0,9)

3) On prend comme valeur approchée de $\int_x^{+\infty} f(t)dt$ la valeur $|v(x)|.f(x)$ (où $|\ |$ désigne la valeur absolue).

En comparant avec la valeur de u(0,9) déduite de $\varphi(0,9)$ [voir I.2) donner une majoration de l'erreur absolue commise ainsi lorsque x = 0,9.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail